«Теория принятия решений»

Тема 4. **Оптимизация решений**

Лекция. **Целочисленное программирование**

Цель: Показать сущность задач дискретного и, в частности, целочисленного программирования и дать основные методы их решения.

Время - 2 часа

Учебные вопросы:

1. *Общая задача дискретной программирования и методы ее решения*
2. *Сущность задач целочисленного программирования*
3. *Методы решения задач целочисленного программирования*

Введение. Задачи линейного и нелинейного программирования, постановка и методы решения которых рассмотрены на предыдущих занятиях, предполагали непрерывный характер значений параметров. В некоторых случаях это условие не выполняется. Тогда речь заходит о *дискретной оптимизации*, а если дополнительно к условию дискретности ставится и условие, определяющее, что решение должно быть только целочисленным, то уместно вести речь о *целочисленной оптимизации*

1. Общая задача дискретной программирования и методы ее решения

Среди прикладных задач отыскания условного экстремума целевой функции важное место занимают задачи с выбором значений параметров из некоторой дискретной совокупности. Примерами таких задач являются : определение очередности выполнения работ, назначение ресурсов по объектам использования, задача, известная к литературе под названием «задача о рюкзаке» и т..д. В данных задачах требование дискретности является необходимым условием решения.

Формальные модели решения всего множества подобных задач, весьма сходны. В общем виде модель для задачи дискретного программирования записывается в виде

$$\text{максимизировать (минимизировать) } U = w(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при ограничениях:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, \quad i = 1, \dots, m;$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n;$$
$$x_j \in D_j, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad n_1 \le n,$$

где D_j - либо конечное множество, содержащее не менее двух элементов, либо счетное множество.

Последнее условие называют *условием дискретности*. Оно выделяет задачи данного класса. В зависимости от вида целевой функции и первых условия выделяют **дискретные** задачи *линейного* и *нелинейного* программирования.

Если условие дискретности относится ко всем переменным $x_j (n_1 = n)$, то задачу принято называть *полностью дискретной*, если к части переменных $x_j (n_1 > n)$ - *частично дискретной*.

В соответствии с тем, какие значения в области D_j могут принимать переменные x_j, из дискретных задач выделяют задачи *целочисленные* и *нецелочисленные*. В целочисленных задачах каждая переменная x_j (j=1,...,n) может быть только целым числом, в нецелочисленных - как целым, так и нецелым. Целочисленное программирование является наиболее изученным разделом дискретного программирования.

Частным случаем задачи целочисленного программирования является задача *с булевыми переменными*, где переменные принимают значения только 0 и 1.

Особенности задач дискретного программирования, определяющие специфику поиска решений, состоят в том, что область допустимых решений задается условиями двух типов: регулярными условиями (первые) и условиями дискретности (последние) - и является невыпуклой и несвязной. Ввиду этого для решения задач дискретного программирования невозможно использовать стандартные приемы регулярного математического программирования: направленный перебор вершин многогранника, перемещение по градиенту в окрестности некоторой точки и т.п.

«Наивные» подходы к дискретным задачам также несостоятельны.. Так, метод прямого перебора отступает перед размерностью задачи - числом вариантов, подлежащих просмотру. Отбрасывание условий дискретности и решение соответствующей недискретной задачи (в частности, задачи линейного программирования) с последующим округлением целочисленных компонентов решения может привести к существенным ошибкам.

Поэтому для решения задач дискретного программирования разработаны специальные методы. Среди них выделяют **точные** и **приближенные**. Последние разделяются на *методы случайного поиска* и *методы регулярного поиска*. Группа точных методов представляется *методами отсечения* и *комбинаторными методами*.

Методы отсечения предполагают погружение области допустимых решений дискретной задачи в объемлющую ее выпуклую область задачи линейного программирования. Находится оптимальное решение. Если оно не удовлетворяет условию дискретности, то к общим ограничениям, то к общим ограничениям добавляется линейное ограничение, отсекающее нецелочисленное решение и не выводящее из области определения задачи ни одного решения, входящего в область ограничений. Затем решается новая задача линейного программирования. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено решение, отвечающее условию дискретности.

Комбинаторные методы используют идею замены полного перебора всех решений их частичным перебором. При этом в процессе перебора отбрасываются некоторые подмножества решений, заведомо не содержащие оптимальное решение. Комбинаторные методы в значительно меньшей степени по сравнению с методами отсечения подвержены влиянию ошибок округления. В некоторых комбинаторных методах обходятся без решения задачи линейного программирования.

Тем не менее, сложность существующих точных методов и трудоемкость их реализации, особенно для задач большой размерности, не исключает использования приближенных методов для решения задач дискретного программирования.

2. Сущность задач целочисленного программирования

Не вполне строго целочисленное программирование как область математической оптимизации, связанную с задачами, в которых все или некоторые переменные должны иметь целочисленные значения. Нелинейность, вытекающая из требования целочисленности, выражена довольно слабо для того, чтобы проявиться в неожиданных изменениях других нелинейных зависимостей, что позволяет в большинстве нелинейных моделей целочисленного программирования линейные и целочисленные компоненты. Поэтому целочисленное программирование рассматривается как раздел математической оптимизации линейных моделей (в частности, линейного программирования), в которых на некоторые или все переменные наложено условие целочисленности.

Мотивы появления требования целочисленности очевидны и характерны для тех случаев, когда речь идет об определении оптимального количества самолетов, грузовых судов или людей. Требование целочисленности, если не в явном виде, то в скрытой форме, присуще многим практически важным классам задач, что обеспечивает широкую область применения целочисленного программирования во многих теоретических и прикладных дисциплинах. Это, к примеру, составление последовательности производственных процессов, календарное планирование работы предприятия, размещение предприятий, геологоразведка, размещение ресурсов, планирование использования оборудования - эти важные производственные задачи представляют небольшую часть области применения целочисленного программирования.

Задачи, связанные с вопросами конструирования вычислительных машин, надежности систем, кодирования сигналов дополняют те классы задач, которые традиционно формулируются в рамках целочисленного программирования.

3. Методы решения задач целочисленного программирования

К настоящему времени разработано большое количество методов решения задач целочисленного программирования и специальных модификаций этих методов применительно к частным случаям. Однако почти все их можно описать на основе единой принципиальной схемы.

Методы решения задач целочисленного программирования, как правило, предусматривают процедуры формирования и решения последовательности взаимосвязанных задач, которые определяют как задачи, порожденные исходной задачей. Каждой порожденной задаче ставится в соответствие определенная ослабленная задача, легче поддающаяся решению, чем соответствующая ей порожденная задача (в этом случае последняя называется задачей-истоком). Решение ослабленной задачи показывает, как следует поступить с ее истоком, т.е. можно ли его исключить или необходимо заменить одной или несколькими задачами, порождаемыми им самим. После этого выбирается одна из тех порожденных задач, которая еще не была исключена, либо заменена, и такой процесс повторяется до тех пор, пока ни одна из порожденных задач не останется нерассмотренной.

Во многих методах (например, в методах отсечения) просмотр каждой задачи приводит к появлению точно одной порожденной задачи, хотя идентификация этой порожденной задачи обычно обеспечивается выбором из нескольких альтернатив.

Основной особенностью ослабленной задачи является то, что по сравнению с ограничениями задачи истока ее ограничения являются менее жесткими, то есть определяют более широкую (по крайней мере не меньшую) область допустимых решений. Нередко формулировка ослабленной задачи предусматривает только исключение некоторых из ограничений задачи-истока. Например, ослабленные задачи, используемые в целочисленном программировании, представляют собой обыкновенные задачи линейного программирования, получаемые за счет отбрасывания требований целочисленности. Целевая функция ослабленной задачи также может отличаться от целевой функции задачи-истока при условии, что оптимальное значение первой не превосходит оптимального значения второй (если речь идет от задаче минимизации).

Общая операционная схема методов целочисленного программирования.

Шаг 1. Начать со списка задач, который содержит в качестве единственного элемента исходную задачу.

Шаг 2. Выбрать из списка задачу. Если в списке нет задач, реализация метода на этом заканчивается и наилучшее из найденных до сих пор решений есть оптимальное решение исходной задачи. Если такие решения не найдены, то исходная задача не имеет допустимого решения.

Шаг 3. Решить ослабленную задачу (или совокупность ослабленных задач), соответствующую выбранной задаче.

Если ослабленная задача не имеет допустимого решения, исключить выбранную задачу из списка и вернуться к шагу 2.

Если оптимальное значение целевой функции ослабленной задачи равно или больше значения целевой функции лучшего из найденных пока решений, исключить выбранную задачу из списка и вернуться к шагу 2.

Если ни одна из перечисленных выше ситуаций не имеет места и оптимальное решение ослабленной задачи является оптимальным для выбранной задачи, проверить, будет ли это решение допустимым решением исходной задачи. Если допустимость этого решения для исходной задачи установлена, внести его в список в качестве нового возможного решения исходной задачи и вернуться к шагу 2.

Если ни одна из перечисленных ситуаций не имеет места, рассмотреть выбранную задачу в качестве порождающей и сформулировать множество из одной или нескольких порожденных задач (используя отсечения, видоизмененное представление задачи и т.д.). Внести эти задачи в список вместо породившей их задачи и вернуться к шагу 2.

Проиллюстрируем эту общую последовательность **примером**, реализующим *метод отсечения*.

$$\textit{максимизировать}\ \ z = 7x_1 + 9x_2$$

при ограничениях

$$-x_1 + 3x_2 \le 6, \quad 7x_1 + x_2 \le 35,$$

$$x_1, x_2 \text{ - неотрицательные целые.}$$

Ослабление ограничений путем отбрасывания требования целочисленности позволяет свести поставленную задачу к задаче линейного программирования (рис 1.).

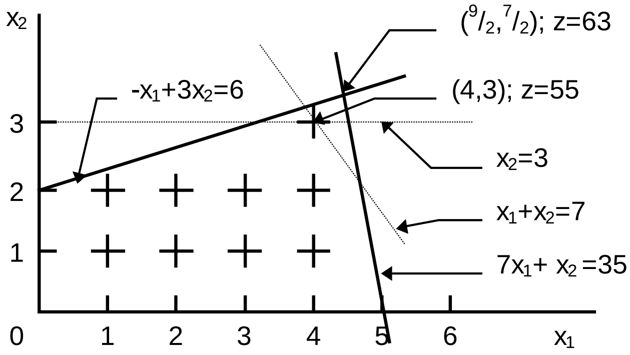

Рис.1

Оптимальное значение целевой функции z=63 достигается в точке с *дробными координатами* $x_1={}^9/_2$ и $x_2={}^7/_2$/. Эти значения получены в результате решения ослабленной задачи (без учета ограничений целостности).

В основе метода отсечения лежит преобразование области допустимых значений в выпуклый многоугольник (в общем случае - многогранник), экстремальная точка которого является оптимальным решением исходной целочисленной задачи. При этом, естественно, *все* допустимые *целочисленные* решения исходной задачи должны лежать внутри или на границе построенного многоугольника (многогранника).

Преобразуем исходную задачу к стандартному виду

$$\textit{максимизировать}\ \ z = 7x_1 + 9x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

при ограничениях

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$$

$$7x_1 + x_2 + x_4 = 35,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями задается таблицей

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
z	0	0	$^{28}/_{11}$	$^{15}/_{11}$	63
x_1	0	1	$^{7}/_{22}$	$^{1}/_{22}$	$^{7}/_{2}$
x_2	1	0	$^{-1}/_{22}$	$^{3}/_{22}$	$^{9}/_{2}$

Полученное решение не является целочисленным, поэтому следует расширить таблицу путем введения некоторого *отсечения*. В качестве производящей строки можно выбрать любую из строк таблицы, содержащих нецелые компоненты решения. Обычно используется эмпирическое правило, согласно которому выбирается строка, соответствующая максимуму дробной части переменной. Поскольку в обе строки входит одно и то же значение дробной части ($^1/_2$), то любая из них может быть выбрана в качестве производящей. Строке с базисной переменной x_2 соответствует равенство

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3\frac{1}{2}$$

или

$$x_2 + \left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = \left(3 + \frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, уравнение отсечения имеет вид

$$S_1 - \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Получаем новую таблицу

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	Решение
z	0	0	$^{28}/_{11}$	$^{15}/_{11}$	0	63
x_1	0	1	$^7/_{22}$	$^1/_{22}$	0	$^7/_2$
x_2	1	0	$^{-1}/_{22}$	$^3/_{22}$	0	$^9/_2$
S_1	0	0	$-^7/_{22}$	$-^1/_{22}$	1	$-^1/_2$

Использование симплекс-метода приводит к таблице

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	Решение
z	0	0	0	1	8	59
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	$^1/_7$	$-^1/_7$	$4^4/_7$
x_3	0	0	1	$^1/_7$	$-^{22}/_7$	$1^4/_7$

Так как решение опять не является целочисленным, необходимо продолжить процесс введения отсечений. Строке с базисной переменной x_1 соответствует равенство

$$x_1 + \left(0 + \frac{1}{7}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right)S_2 = \left(4 + \frac{4}{7}\right),$$

порождающее отсечение

$$S_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}S_1 = -\frac{4}{7}.$$

Добавим это отсечение к последней таблице

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	Решение
z	0	0	0	1	8	0	59
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$^1/_7$	$-^1/_7$	0	$4^4/_7$
x_3	0	0	1	$^1/_7$	$-^{22}/_7$	0	$1^4/_7$
S_2	0	0	0	$-^1/_7$	$-^6/_7$	1	$-^4/_7$

В результате использования симплекс-метода получим таблицу

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	Решение
z	0	0	0	1	2	7	55
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4

Эта таблица дает оптимальное целочисленное решение исходной задачи: z=55, x_1=4, x_2=3.

Рассмотренные отсечения исключают некоторые области многоугольника допустимых решений. Первое отсечение

$$S_1 - \frac{7}{22} x_3 - \frac{1}{22} x_4 = -\frac{1}{2},$$

записанное в переменных x_1 и x_2, после соответствующей замены принимает следующий вид:

$$S_1 - \frac{7}{22}\left(6 + x_1 - 3x_2\right) - \frac{1}{22}\left(35 - 7x_1 - x_2\right) = -\frac{1}{2}$$

или

$$S_1 + x_2 = 3.$$

Это уравнение эквивалентно неравенству $x_2 \le 3$.

Аналогичным образом второе отсечение

$$S_2 - \frac{1}{7} x_4 - \frac{6}{7} S_1 = -\frac{4}{7}$$

порождает эквивалентное ограничение в переменных x_1 и x_2:

$$x_1 + x_2 \le 7.$$

На рис.1 показано, как введение этих двух ограничений позволяет получить новую экстремальную точку с координатами (4,3), в которой достигается оптимум исходной целочисленной задачи.